CAPÍTULO 4

Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Hasta ahora hemos considerado únicamente ecuaciones diferenciales aisladas. Sin embargo, en muchas aplicaciones aparecen situaciones en las que el fenómeno que se quiere estudiar está descrito por dos o más funciones desconocidas de tal manera que la variación de cada una de estas funciones depende también de las otras funciones. En este caso no será suficiente con una única ecuación si no que más bien se necesitará un conjunto de ecuaciones. Un conjunto de ecuaciones diferenciales que han de ser satisfechas simultáneamente es lo que se denomina un sistema de ecuaciones diferenciales. En este capítulo vamos a estudiar algunos de estos sistemas.

El tipo de sistemas por el que estamos interesados, y que es el único que vamos a considerar en estas notas, es aquel en el que todas sus ecuaciones vienen expresadas, o se pueden expresar, en forma normal y el número de funciones incógnitas es el mismo que el de ecuaciones. Supondremos además que dichas ecuaciones son de primer orden.[1] Un sistema de este tipo vendrá dado en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{4.1}$$

Una **solución del sistema** (4.1) en un intervalo I es una función vectorial

[1] Esta segunda condición en realidad no supone ninguna pérdida de generalidad en el estudio de los sistemas de ecuaciones en los que estamos interesados porque, como veremos más adelante, todo sistema de ecuaciones diferenciales expresadas en forma normal tiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado equivalente.

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ definida en I y con valores en $\mathbb{R}^n$ que verifica

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

para todo $x \in I$ y $j = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.0.3. Si $y_1(x) = y_2(x) = e^{2x}$, la función (y_1, y_2) es una solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases}$$

porque

$$y_1'(x) = 2e^{2x} = 3y_1(x) - y_2(x) \quad \text{e} \quad y_2'(x) = 2e^{2x} = y_1(x) + y_2(x).$$

Cuando el número de ecuaciones del sistema es pequeño se suelen emplear diferentes letras para las funciones incógnitas, generalmente $x, y, z. \ldots,$ en lugar de subíndices.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden también pueden resultar útiles en el estudio de ecuaciones de diferenciales de orden superior. Veamos cómo. Si una función y es una solución de la ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

y ponemos

$$y_1 = y, \ y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}, \tag{4.3}$$

entonces es obvio que $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{4.4}$$

Recíprocamente, si $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema (4.4) entonces y_1 es una solución de la ecuación (4.2). En este sentido podemos considerar que la ecuación (4.2) y el sistema (4.4) son equivalentes. Obsérvese que si la ecuación diferencial (4.2) es lineal entonces todas las ecuaciones del sistema (4.4) son lineales.

Ejemplo 4.0.4. La ecuación de tercer orden

$$y''' - 2y'' - 3y' + 7y = 3e^x \cos 2x$$

haciendo los cambios

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''.$$

da lugar al sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_3 + 3y_2 - 7y + 3e^x \cos 2x \end{cases}$$

Aplicando el método anterior a cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones, no todas necesariamente del mismo orden pero todas expresadas en forma normal, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente al anterior. Este hecho nos permite remitir el estudio de sistemas de ecuaciones de cualquier orden al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 4.0.5. El sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4x + 3y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \quad 2x - 3y + 10 \operatorname{sen} 5t \end{cases}$$

haciendo los cambios

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y'$$

da lugar al sistema de cuatro ecuaciones de primer orden equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 3y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2x_1 - 3y_1 + 10 \operatorname{sen} 5t \end{cases}$$

Si las funciones $f_1, \dots, f_n$ son lineales en las variables $y_1, \dots, y_n$ el sistema (4.1) es un **sistema de ecuaciones lineales de primer orden**. La forma general de estos sistemas es

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \tag{4.5}$$

donde las funciones a_{ij} y b_i, $i, j = 1, 2, \dots, n$, son funciones continuas en un cierto intervalo I. El sistema (4.5) se denomina **sistema lineal de orden** n o simplemente **sistema lineal**. Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n \equiv 0$ el sistema se dice que es **homogéneo**, en caso contrario se dice que es **no homogéneo**.

Cuando se trabaja con sistemas lineales es conveniente emplear la notación matricial. Haciendo uso de esta notación el sistema (4.5) se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Si identificamos la función vectorial de una variable real

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

con el vector columna

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de ese vector es una función real de una variable, la relación (4.6) también se puede escribir en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.7}$$

donde $\mathbf{A}(x)$ es la matriz cuadrada

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b}$ es la función vectorial de una variable $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

La primera idea que surge al tratar de hallar la solución de un sistemas de ecuaciones diferenciales es la de intentar reproducir los métodos empleados al resolver los sistemas de ecuaciones (algebraicas) lineales. El **método de eliminación** para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales consiste, como en el caso de ecuaciones algebraicas, en ir eliminando de manera sucesiva las incógnitas hasta llegar a una ecuación diferencial, generalmente de orden superior, con una única incógnita que habrá que revolver, si es posible, empleando los métodos que hemos visto en los capítulos precedentes.

Ejemplo 4.0.6. Supongamos que queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} x' =4x - 3y \\ y' =6x - 7y \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación queda que

$$x = \frac{1}{6}\left(y' + 7y\right) \tag{4.8}$$

y derivando

$$x' = \frac{1}{6}\left(y'' + 7y'\right).$$

Sustituyendo x y x' en la primera ecuación del sistema se obtiene

$$\frac{1}{6}\left(y'' + 7y'\right) = \frac{4}{6}\left(y' + 7y\right) - 3y$$

que simplificando queda

$$y'' + 3y' - 10y = 0. \tag{4.9}$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden cuya ecuación característica

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

tiene dos raíces $\lambda = 2$ y $\lambda = -5$. Según vimos en el capítulo precedente la solución general de (4.9) es entonces

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}.$$

Sustituyendo esta expresión en (4.8) se obtiene que

$$x(t) = \frac{1}{6}\left(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}\right) + \frac{7}{6}\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}\right) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}.$$

Este procedimiento de resolución de sistemas lineales es útil si el sistema es sencillo. Para sistemas más complicados los métodos que veremos más adelante en este capítulo resultan más adecuados.

4.1. Estructura del conjunto de soluciones

El esquema que vamos a seguir en el desarrollo esta sección va a ser muy similar al que seguimos al estudiar la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden superior. Al igual que allí, comenzaremos enunciando, sin demostración, el teorema de existencia y unicidad para los problemas de valor inicial de sistemas lineales.

Teorema 4.1.1 (Teorema de existencia y unicidad). *Sean a_{ij} y b_i funciones continuas en un intervalo I, $i, j = 1, \ldots, n$. Sean $x_0 \in I$ e $y_1^0, \ldots, y_n^0 \in \mathbb{R}$. Existe una única solución $(y_1, \ldots, y_n)$ del sistema lineal (4.5) en el intervalo I que satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0$.*

Si el sistema es homogéneo, la función vectorial idénticamente nula siempre es una solución. Teniendo esto en cuenta podemos enunciar la siguiente consecuencia del teorema precedente que nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Corolario 4.1.2. *Sean a_{ij} y b_i, $i, j = 1, \ldots, n$, funciones continuas en un intervalo I. Si $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema lineal homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

en el intervalo I que, para algún $x_0 \in I$, satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = \cdots = y_n(x_0) = 0$ entonces $y_1 = \cdots = y_n \equiv 0$ en I.

4.1.1. Sistemas lineales homogéneos

Comenzaremos estudiando la estructura del conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.10}$$

Teorema 4.1.3 (Principio de superposición). *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ son soluciones del sistema lineal homogéneo (4.10) en un intervalo I y $c_1, \ldots, c_m$ son números reales, entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_m\mathbf{y}_m$$

también es una solución del sistema (4.10) en I.

La demostración de este teorema es inmediata.

Definición 4.1.4. Un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes reales, $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x) = 0 \tag{4.11}$$

para todo $x \in I$. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Definición 4.1.5. Dadas n funciones vectoriales, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$,

$$\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{nj}), \quad j = 1, \dots, n,$$

se define el **wronskiano** de $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ como el determinante

$$W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n] = \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes se verifica que si las funciones $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ son linealmente dependientes entonces su wronskiano es nulo en todo punto. Si dichas funciones son soluciones de un sistema lineal homogéneo el recíproco también es cierto.

Teorema 4.1.6. *Si $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10) en un intervalo I, entonces el conjunto $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ no se anula en I.*

Demostración. Para $j = 1, \dots, n$ sea

$$\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{nj}).$$

Supongamos que que existe un punto $x_0 \in I$ donde el wronskiano se anula. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1 y_{11}(x_0) + \cdots + c_n y_{1n}(x_0) &= 0 \\ c_1 y_{21}(x_0) + \cdots + c_n y_{2n}(x_0) &= 0 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ c_1 y_{n1}(x_0) + \cdots + c_n y_{nn}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

es precisamente el wronskiano en x_0 que estamos suponiendo que es nulo. Esto nos dice que el sistema tiene una solución $(c_1, \dots, c_n)$ no nula. Por el principio de superposición la función

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_n \mathbf{y}_n$$

es una solución de (3.4). Esta solución verifica que $\mathbf{y}(x_0) = 0$ lo que, por el corolario 4.1.2, implica que $y \equiv 0$ que contradice el que el conjunto $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ es linealmente independiente. □

Corolario 4.1.7. *Si $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10) en un intervalo I, entonces el wronskiano $W[\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n]$ o es idénticamente nulo o no se anula nunca en I.*

Definición 4.1.8. Se denomina **conjunto fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10), en un intervalo I, a cualquier conjunto de n soluciones del sistema linealmente independientes en I.

Teorema 4.1.9. *Existe un conjunto fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo (4.10) en el intervalo I.*

Demostración. Por el teorema de existencia y unicidad, 4.1.1, si $x_0 \in I$, existen soluciones del sistema, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, verificando las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}_1(x_0) = (1, 0, \ldots, 0), \; \mathbf{y}_2(x_0) = (0, 1, 0, \ldots, 0), \; \ldots, \; \mathbf{y}_n(x_0) = (0, \ldots, 0, 1)$$

En este caso la correspondiente matriz fundamental que aparece en la definición del wronskiano tiene unos en la diagonal y ceros en las demás entradas, luego $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 1$. Esto demuestra que el conjunto de soluciones $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. □

Se define la **solución general** de un sistema de ecuaciones lineales en un intervalo como el conjunto de todas sus soluciones en ese intervalo.

Teorema 4.1.10. *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de un sistema lineal homogéneo de orden n en un intervalo, entonces la solución general del sistema en dicho intervalo es*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n, \tag{4.12}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

La demostración es análoga a la del teorema 3.1.14.

4.1.2. Sistemas no homogéneos

Para sistemas no homogéneos se tienen las correspondientes versiones de los teoremas para ecuaciones lineales no homogéneas.

Teorema 4.1.11. *Si $\mathbf{y}_p$ es una solución particular del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.13}$$

en un intervalo I e $\mathbf{y}_h$ es una solución del sistema lineal homogéneo asociado a (4.13),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \tag{4.14}$$

entonces

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$$

es también una solución de (4.13) en I y todas las soluciones de (4.13) en dicho intervalo son de esa forma.

Corolario 4.1.12. *Si* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.15}$$

en un intervalo I *e* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ *es un conjunto fundamental de soluciones, en el mismo intervalo, del sistema lineal homogéneo asociado a (4.15), entonces la solución general del sistema (4.15) en* I *es*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p, \tag{4.16}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ *son constantes arbitrarias.*

Teorema 4.1.13 (Principio de superposición para sistemas no homogéneos)**.** *Si para cada* $i = 1, 2, \ldots, m$ *la función* $\mathbf{y}_i$ *es una solución del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}_i(x)$$

en un intervalo I*, entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_m\mathbf{y}_m,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *son constantes reales arbitrarias, es una solución del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + c_1\mathbf{b}_1(x) + \cdots + c_m\mathbf{b}_m(x)$$

en el intervalo I*.*

4.2. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección vamos a estudiar sistemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{4.17}$$

o, expresados en forma matricial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.18}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de elementos constantes.

Vimos al principio del capítulo cómo se podían resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por el método de eliminación. En esta sección vamos a ver un método alternativo de resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes.

4.2.1. Método de los autovalores

Procediendo de forma análoga a como lo hicimos en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes vamos a buscar soluciones del sistema (4.18) de la forma $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si sustituimos esta solución en (4.18) se tiene que

$$\lambda e^{\lambda x}\mathbf{v} = \mathbf{A}\left(e^{\lambda x}\mathbf{v}\right)$$

y dividiendo ambos miembros por la exponencial

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{4.19}$$

Esto nos dice que para que $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ sea una solución de (4.18) se ha de verificar la condición (4.19). Obviamente dicha condición también es suficiente. Además como la exponencial no se anula, dicha solución será no trivial, es decir distinta de la función 0, si el vector $\mathbf{v}$ es distinto de cero. Hemos reducido así el problema de encontrar soluciones de (4.18) del tipo indicado más arriba al problema algebraico de encontrar escalares λ y vectores $\mathbf{v}$ que satisfagan (4.19). Para responder a este último problema es preciso que recordemos algunos resultados y conceptos de álgebra lineal. Para simplificar la exposición posterior será conveniente trabajar en el campo complejo.

Definición 4.2.1. Un número complejo λ se dice que es un **autovalor** o un **valor propio** de la matriz $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{4.20}$$

El vector $\mathbf{v}$ se dice que es un **autovector** o un **vector propio** correspondiente a λ.

Si denotamos por $\mathbf{I}$ a la matriz identidad, que es la que tiene unos en la diagonal y ceros en los demás elementos, podemos reformular la definición anterior diciendo que λ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ si, y sólo si, existe un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{4.21}$$

El conjunto de vectores $\mathbf{v}$ que satisfacen la relación (4.21) es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Identificando las matrices cuadradas $n \times n$ con los correspondientes endomorfismos de $\mathbb{C}^n$, dicho subespacio es precisamente el núcleo del endomorfismo $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, que habitualmente se denota $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. La definición anterior nos dice que λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ si el núcleo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no se reduce al subespacio $\{\mathbf{0}\}$.

Un resultado clásico de álgebra lineal nos dice que el que $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$ es equivalente a que el endomorfismo $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no sea inyectivo que, a su vez, es equivalente a que no sea inversible. Esta última condición también es equivalente a que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{4.22}$$

Resumiendo lo anterior, λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ si, y sólo si, λ es una solución de la ecuación (4.22).

A la ecuación (4.22) se le denomina **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$. El determinante que aparece en la ecuación se comprueba fácilmente que es un polinomio en λ de grado n. Dicho polinomio se denomina **polinomio característico** de la matriz. Se deduce del teorema fundamental del álgebra que existen exactamente n autovalores, contados de acuerdo con su multiplicidad.

Una propiedad de los autovectores que se comprueba sin dificultad es la siguiente.

Proposición 4.2.2. *Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalores distintos de una matriz $n \times n$ y para cada $j = 1, 2, \dots, m$ sea $\mathbf{v}_j$ un autovector correspondiente al autovalor λ_j. Entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes.*

Para nuestro estudio de los sistemas lineales estamos interesados exclusivamente en el caso en que la matriz $\mathbf{A}$ es real. Por este motivo en lo que sigue, y salvo mención expresa de lo contrario, supondremos que $\mathbf{A}$ es real. En este caso los autovalores y autovectores tiene algunas propiedades adicionales que se demuestran fácilmente y que es conveniente hacer notar porque las necesitaremos más adelante.

Si $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es un autovector correspondiente a un autovalor real λ, entonces los vectores reales $(\operatorname{Re} v_1, \dots, \operatorname{Re} v_n)$ e $(\operatorname{Im} v_1, \dots, \operatorname{Im} v_n)$ también satisfacen (4.20). Como al menos uno de estos dos vectores es no nulo resulta que siempre existe un autovector real correspondiente a λ. En lo que sigue, salvo mención expresa de lo contrario, siempre que hablemos de los autovectores de un autovalor real nos estaremos refiriendo exclusivamente a los autovectores reales.

Por otro lado si λ es un autovalor no real, su conjugado $\overline{\lambda}$ también es un autovalor. Además, en este caso, si $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es un autovector correspondiente a λ entonces su vector conjugado, $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v_1}, \dots, \overline{v_n})$, es un autovector correspondiente a $\overline{\lambda}$.

Autovalores reales distintos

Estamos ya en condiciones de dar nuestro primer resultado acerca de las soluciones de (4.18) en el caso en que todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son reales y distintos.

Teorema 4.2.3. *Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, reales distintos y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son autovectores correspondientes a los autovalores entonces el conjunto de funciones*

$$e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1, \dots, e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n \tag{4.23}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (4.18).

Demostración. Ya hemos visto más arriba que esas funciones son soluciones de (4.18). Para ver que además son linealmente independientes basta observar que su wronskiano en 0 es el determinante de la matriz que tiene por columnas los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, que es no nulo porque, por 4.2.2, esos vectores son linealmente independientes. □

Ejemplo 4.2.4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x - y \end{cases} \tag{4.24}$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz de los coeficientes del sistema es

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

que tiene dos soluciones reales $\lambda = 5$ y $\lambda = -2$.

El vector $\mathbf{v} = (a, b)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 5$ si, y sólo si, se verifica la relación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0 \\ 3a - 6b &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(2b, b)$ con b un número real.

Análogamente, $\mathbf{v} = (a, b)$ es un autovector correspondientes a $\lambda = -2$ si

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0 \\ 3a + b &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(a, -3a)$ con a un número real. Por el teorema precedente la solución general de (4.24) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

o en forma escalar

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) = c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

Autovalores reales o complejos distintos

El argumento del principio de esta sección también es válido si λ es un número complejo. Por lo tanto, si los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son todos distintos y algunos de ellos, o todos, son complejos el procedimiento anterior nos proporciona un conjunto fundamental de soluciones de (4.18), pero, en este caso, algunas de las soluciones no son reales sino complejas.[2] Como nosotros estamos interesados sólo en las soluciones reales vamos a proceder de manera semejante a como lo hicimos en el capítulo precedente.

Ya hemos indicado antes que los autovalores, por ser la matriz real, aparecen por pares, de manera que si $\lambda = \alpha + \beta i$ es un autovalor también lo es su conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$. Además, los autovectores correspondientes a $\overline{\lambda}$ son los conjugados de los correspondientes a λ. Así si $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ es un autovector correspondiente a λ, las funciones

$$e^{\lambda x}\mathbf{v} \quad \text{y} \quad e^{\overline{\lambda} x}\overline{\mathbf{v}} = \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}$$

son soluciones complejas de (4.18). Por ser la matriz $\mathbf{A}$ real, las partes real e imaginaria de dichas soluciones también son soluciones, en este caso reales, de (4.18). Como las dos soluciones complejas son conjugadas ambas tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas por lo que únicamente será necesario considerar las de una de las dos soluciones complejas, por ejemplo $e^{\lambda x}\mathbf{v}$, que son

$$e^{\alpha x}\big(\mathbf{a}\cos\beta x - \mathbf{b}\operatorname{sen}\beta x\big) \quad \text{y} \quad e^{\alpha x}\big(\mathbf{b}\cos\beta x + \mathbf{a}\operatorname{sen}\beta x\big).$$

Además como

$$\operatorname{Re}\big(e^{\lambda x}\mathbf{v}\big) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{v} + \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\big(e^{\lambda x}\mathbf{v}\big) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{v} - \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}}{2i},$$

si reemplazamos las dos soluciones complejas por las dos reales en un conjunto linealmente independiente el conjunto nuevo también es linealmente independiente. Podemos así extender el teorema 4.2.3 al caso de autovalores distintos reales o complejos.

Teorema 4.2.5. *Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n autovalores distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2m}$ reales y $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \ldots, \alpha_m \pm \beta_m i$ complejos, y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-2m}$ son autovectores (reales) correspondientes a los autovalores reales y $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{b}_1 i, \ldots, \mathbf{a}_m \pm \mathbf{b}_m i$ son autovectores correspondientes a los autovalores complejos, entonces el conjunto de funciones*

$$e^{\lambda_j x}\mathbf{v}_j, \quad e^{\alpha_k x}\big(\mathbf{a}_k\cos\beta_k x - \mathbf{b}_k\operatorname{sen}\beta_k x\big), \quad e^{\alpha_k x}\big(\mathbf{b}_k\cos\beta_k x + \mathbf{a}_k\operatorname{sen}\beta_k x\big),$$

$1 \leqslant j \leqslant n-2m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, es un conjunto fundamental de soluciones de (4.18).

[2] Si λ es un número complejo la función $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ en general no es real.